



## Dérivées partielles et directionnelles

---

### Exercice 1

Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition  $D_f$ . Pour chacune des fonctions, calculer ensuite les dérivées partielles en chaque point du domaine de définition lorsqu'elles existent:

1.  $f(x, y) = x^2 \exp(xy)$ ,
2.  $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ ,
3.  $f(x, y) = \sin^2 x + \cos^2 y$ ,
4.  $f(x, y, z) = x^2 y^2 \sqrt{z}$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002622]

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction sur  $\mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = x \cos y + y \exp x$ .

1. Calculer ses dérivées partielles.
2. Soit  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Calculer  $D_v f(0, 0)$ . Pour quelle(s) valeur(s) de  $\theta$  cette dérivée directionnelle de  $f$  est-elle maximale/minimale? Que cela signifie-t-il?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[002623]

### Exercice 3

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x, y) = f(x + y), \quad h(x, y) = f(x^2 + y^2), \quad k(x, y) = f(xy)$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[001801]

### Exercice 4

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x & \text{si } |x| > |y| \\ f(x, y) &= y & \text{si } |x| < |y| \\ f(x, y) &= 0 & \text{si } |x| = |y|. \end{aligned}$$

Étudier la continuité de  $f$ , l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[001803]

### Exercice 5

Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ f(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Étudier la continuité de  $f$ . Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)

[001800]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpréter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles de calcul de la dérivée ordinaires.

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

Interpréter la dérivée directionnelle à l'aide de l'intersection du graphe de la fonction avec un plan convenable.

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

Pour calculer les dérivées partielles par rapport à une variable, interpréter les autres variables comme paramètres et utiliser les règles de calcul de la dérivée ordinaires.

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

Distinguer tout de suite la partie triviale et la partie non triviale de l'exercice.

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

Il est évident que, en tout point  $(x, y)$  distinct de l'origine, la fonction  $f$  est continue et que les dérivées partielles  $y$  existent et sont continues. Il suffit de montrer que  $f$  est continue en  $(0, 0)$  et que les dérivées partielles  $y$  existent et  $y$  sont continues.

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

---

1.  $D_f = \mathbb{R}^2$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \exp(xy) + x^2 y \exp(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \exp(xy)$$

2.  $D_f = \{(x, y); x > 0 \text{ ou } y \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2}$$

3.  $D_f = \mathbb{R}^2$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \sin x \cos x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2 \sin y \cos y$$

4.  $D_f = \{(x, y, z); z \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y\sqrt{z}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2y^2}{2\sqrt{z}}$$

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

---

1.  $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + y \exp x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + \exp x$ .

2.  $D_v f(0, 0) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \cos \theta + \sin \theta$ . Cette dérivée directionnelle de  $f$  est maximale quand  $\sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , c.a.d. quand  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , et minimale quand  $\sin \theta = \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , c.a.d. quand  $\theta = \frac{5}{4}\pi$ .

Signification géométrique: Le plan engendré par le vecteur  $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$  et l'axe des  $z$  rencontre le graphe  $z = f(x, y)$  en une courbe. Cette courbe est de pente maximale en valeur absolue pour  $\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\cos \theta = \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  (même plan). Les deux signes s'expliquent par les deux orientations possibles de cette courbe (sens du paramétrage).

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

---

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= f'(x+y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= f'(x+y) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= 2xf'(x^2+y^2) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= 2yf'(x^2+y^2) \\ \frac{\partial k}{\partial x}(x,y) &= yf'(xy) \\ \frac{\partial k}{\partial y}(x,y) &= xf'(xy)\end{aligned}$$

#### Correction de l'exercice 4 ▲

Il est évident que, en tout point tel que  $|x| < |y|$  ou  $|x| > |y|$ , la fonction est continue et les dérivées partielles existent.

Soit  $x \neq 0$ . Alors  $f$  n'est ni continue en  $(x, x)$  ni en  $(x, -x)$ . Car

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (x,x) \\ |u| > |v|}} f(u,v) &= \lim_{u \rightarrow x} u = x \neq 0, \\ \lim_{(u,u) \rightarrow (x,x)} f(u,u) &= 0, \\ \lim_{\substack{(u,v) \rightarrow (x,-x) \\ |u| > |v|}} f(u,v) &= \lim_{u \rightarrow x} u = x \neq 0, \\ \lim_{(u,-u) \rightarrow (x,-x)} f(u,u) &= 0.\end{aligned}$$

Par contre,  $f$  est continue en  $(0, 0)$ . Car

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} f(u,v) = 0$$

puisque

$$\begin{aligned}f(u,v) &= u \quad \text{si } |u| > |v|, \\ f(u,v) &= v \quad \text{si } |u| < |v|, \\ f(u,v) &= 0 \quad \text{si } |u| = |v|,\end{aligned}$$

et puisque alors  $\lim_{u \rightarrow 0} u = 0$  et  $\lim_{v \rightarrow 0} v = 0$ .

Soit  $(x, y)$  un point où  $|x| = |y|$ . Il reste à étudier les dérivées partielles en un tel point  $(x, y)$ . Soit  $x \neq 0$ . Alors la fonction  $h$  de la variable  $t$  définie par

$$h(t) = f(x+t, y) = \begin{cases} x+t, & |x+t| > |y| \\ y, & |x+t| < |y| \end{cases}$$

n'est pas dérivable en  $t = 0$  donc la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  n'existe pas. De même, la fonction  $k$  de la variable  $t$  définie par

$$k(t) = f(x, y+t) = \begin{cases} x, & |x| > |y+t|, \\ y+t, & |x| < |y+t|, \end{cases}$$

n'est pas dérivable en  $t = 0$  donc la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  n'existe pas. Enfin soit  $x = 0$ . Alors la fonction  $h$  de la variable  $t$  définie par

$$h(t) = f(t, 0) = t$$

est dérivable en  $t = 0$  donc la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe. De même, la fonction  $k$  de la variable  $t$  définie par

$$k(t) = f(0, t) = t$$

est dérivable en  $t = 0$  donc la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existe.

---

### Correction de l'exercice 5 ▲

---

Puisque  $\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right|$  reste borné,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$$

d'où  $f$  est continue en  $(0, 0)$ . De même,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$$

d'où les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existent, et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . En plus, en dehors de l'origine,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x,y)}{x} + xy \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{f(x,y)}{x} + 4 \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f(x,y)}{y} + xy \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{f(x,y)}{y} + 4 \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

il s'ensuit que

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0, \quad \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0,$$

d'où les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues en  $(0, 0)$ .

---